Correction exercice 3

A) 1. $u'(t) = -5e^{-0,5t}$

$u'(t) + u(t) = 10e^{-0,5t} - 5e^{-0,5t} = 5e^{-0,5t}$

2. (E_0) : $y' + y = 0 \Rightarrow y(t) = Ce^{-t}$

3. (E) : $S = \{ y(t) \,/\, y(t) = Ce^{-t} + 10e^{-0,5t} \}$.

4. $y(0) = C + 10 = 0 \Rightarrow C = -10$

$y_0(t) = -10e^{-t} + 10e^{-0,5t}$

$= 10\,(e^{-0,5t} - e^{-t})$

B) 1. $\forall t \in [0;+\infty[$

$f'(t) = 10 \times (-0,5e^{-0,5t} + e^{-t})$

$= 10\, e^{-0,5t}\,(-0,5 + e^{-0,5t}) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow e^{-0,5t} \geqslant \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow t \leqslant 2\ln 2$

t	0		$2\ln 2$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$2,5$	$\searrow$	0

2. $f(2\ln 2) = 10\left(e^{-\frac{1}{2}2\ln 2} - e^{-2\ln 2}\right)$

$= 10\left(e^{-\ln 2} - e^{-2\ln 2}\right)$

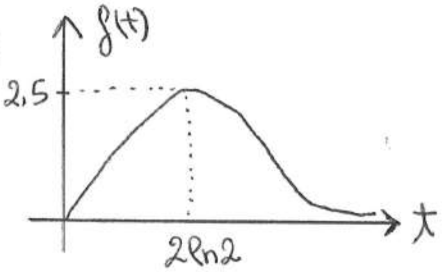
$= 10\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$

$= 2{,}5 \text{ mmol/l}$

3. $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 10(0-0) = 0$

4. (Voir 1).

5. a) $y = f'(0)(t-0) + f(0) = 5t$

b) 

6. a) - f continue et strictement croissante sur $]0;2\ln 2]$

- $0{,}475 \in]0;2{,}5] =]\lim_{t\to 0} f(t) ; f(2\ln 2)]$

- d'après le corollaire du T.V.I, $\exists!\, t_1 \in]0;2\ln 2]$ tel que $f(t_1) = 0{,}475$.

De même, $\exists!\, t_2 \in [2\ln 2 ; +\infty[\;/\; f(t_2) = 0{,}475$.

b) $10\left(e^{-0,5t} - e^{-t}\right) = 0,475$

$\Leftrightarrow 10\, e^{-t} - 10\, e^{-0,5t} + 0,475 = 0$

$X = e^{-0,5t}$

On résoud $10\, x^2 - 10\, x + 0,475 = 0$

$\Delta = 100 - 4 \times 10 \times 0,475 = 100 - 19 = 81$

$x_1 = \dfrac{10+9}{20} = \dfrac{19}{20} = e^{-0,5t_1} = (1,9 \div 2 = 0,95)$

$\Rightarrow t_1 = -2 \ln 0,95 = \underline{0,1\,h}$

$X_2 = \dfrac{10-9}{20} = \dfrac{1}{20} = e^{-0,5t_2} \Rightarrow t_2 = -2 \ln 0,05$

$\underline{t_2 = 6\,h}$

$\boxed{S = \{0,1\,;\,6\}}$

c) Au bout de $t = 6h$, $f(t) \leqslant 0,475$, le médicament est éliminé.

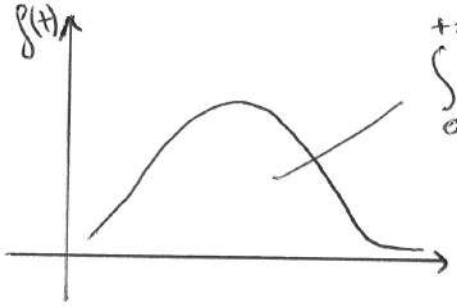
7. a) $\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 10\left(e^{-0,5t} - e^{-t}\right) dt$

$$= 10 \times \left[-2e^{-0,5t} + e^{-t}\right]_0^x$$

$$= 10\left(e^{-x} - 2e^{-0,5x} - (-2+1)\right)$$

$$= 10\left(e^{-x} - 2e^{-0,5x} + 1\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt = 10 \times 1 = \boxed{10 = ASC}$$

b) 

$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 10$

8. a) $f''(t) = 10 \times \left(0,25\, e^{-0,5t} - e^{-t}\right)$

$$f''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} e^{-0,5t} = e^{-t} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = e^{-0,5t}$$

$$\Leftrightarrow -\ln 4 = -\frac{2}{4} t \Leftrightarrow t = 2\ln 2^2 = 4\ln 2$$

$$\boxed{x_0 = 4\ln 2}$$

b). Si $t \in [0 ; x_0]$, C en dessous de ses tangentes (f concave).

Si $t \in [x_0 ; +\infty[$, C au dessus de ses tangentes (f convexe).